Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Принцип вложенных отрезков



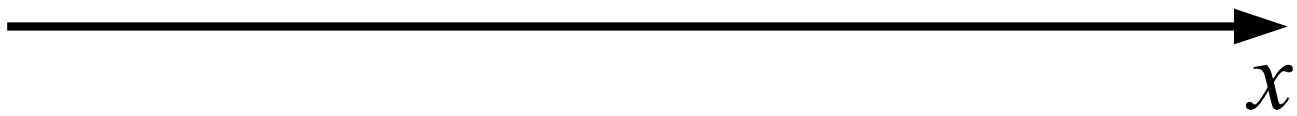
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...



Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...





Принцип вложенных отрезков

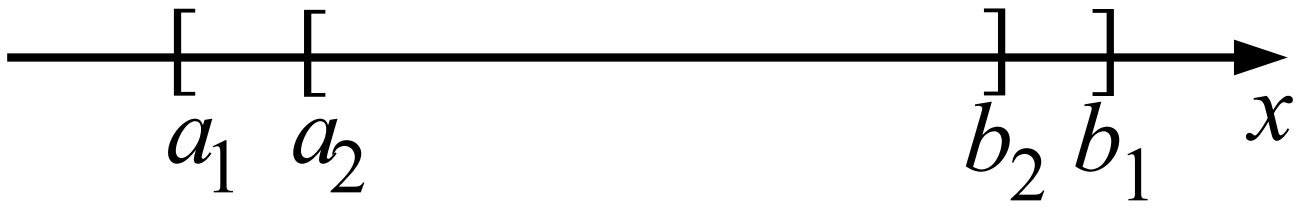
Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...





Принцип вложенных отрезков

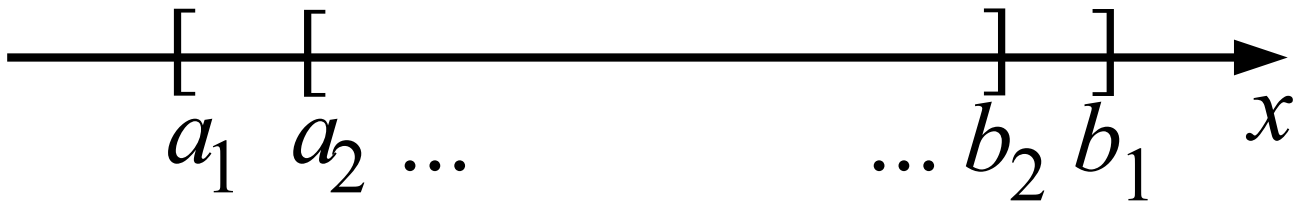
Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...





Принцип вложенных отрезков

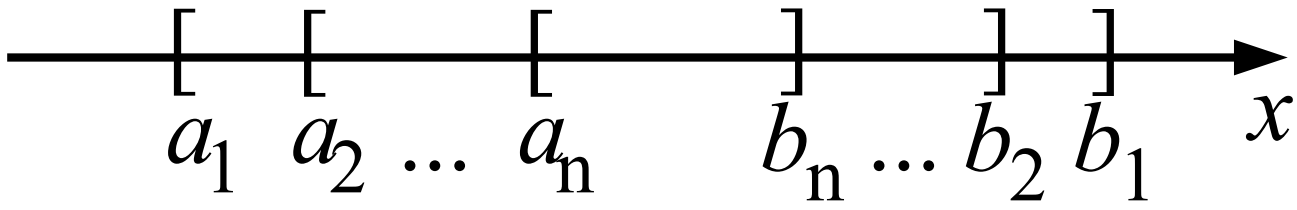
Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...





Принцип вложенных отрезков

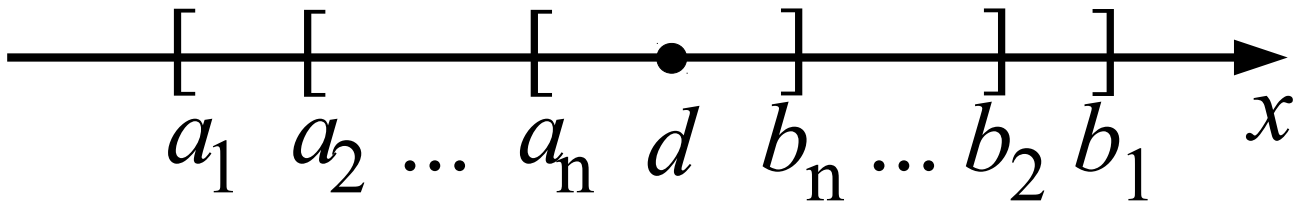
Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...





Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...





Принцип вложенных отрезков

Определение

Система отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... называется **системой вложенных отрезков**, если

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$.



Принцип вложенных отрезков

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $|b_n - a_n| < \varepsilon$.



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ - модуль разности b_n и a_n меньше ε.



Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)



Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)
Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка d, которая принадлежит всем отрезкам системы, причем $d = sup\{a_n\} = inf\{b_n\}$.



Числовая функция



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная

$X = D(f)$ - область определения



Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.



Числовая функция

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x, называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.



Числовая функция

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x, называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.

Обозначение: $x = f^{-1}(y)$

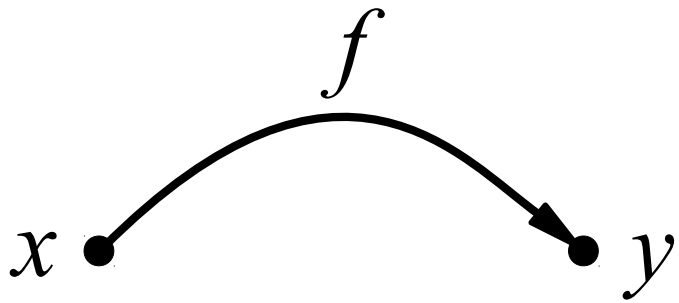


Числовая функция

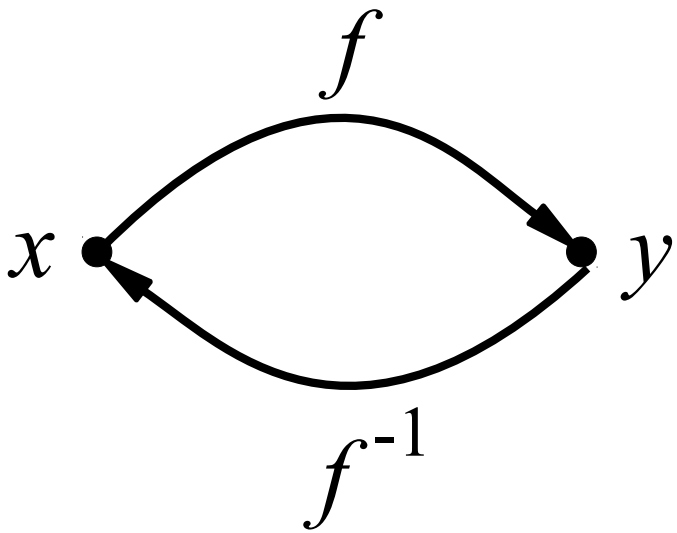




Числовая функция



Числовая функция





Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g.



Числовая функция

Определение

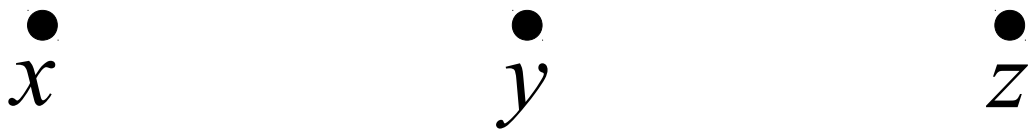
Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g.

Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

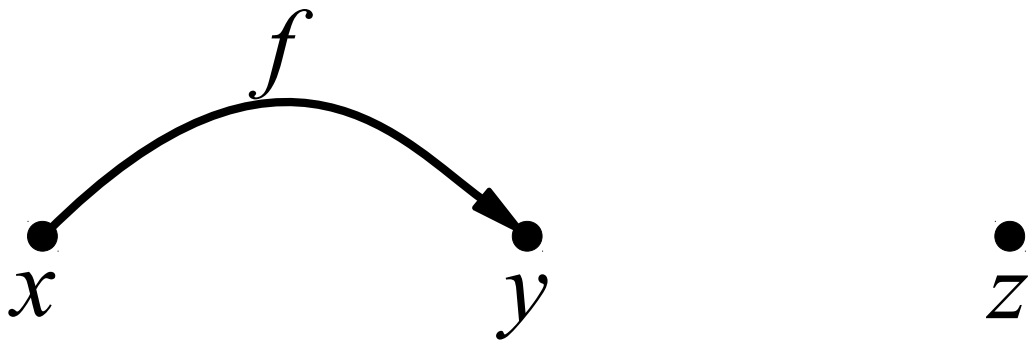


Числовая функция

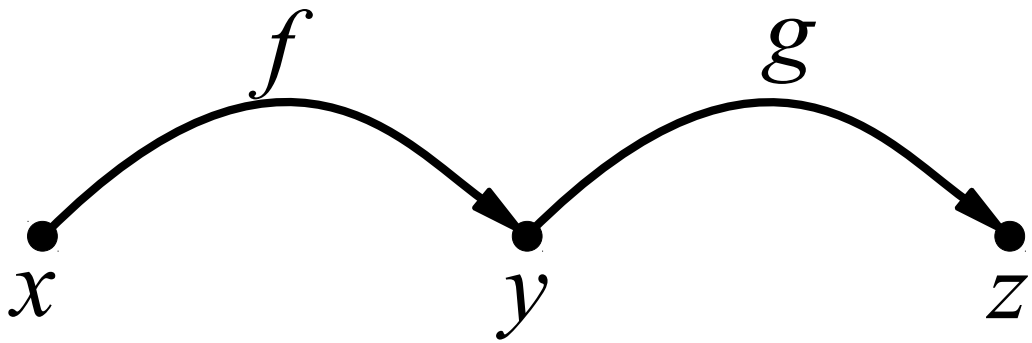




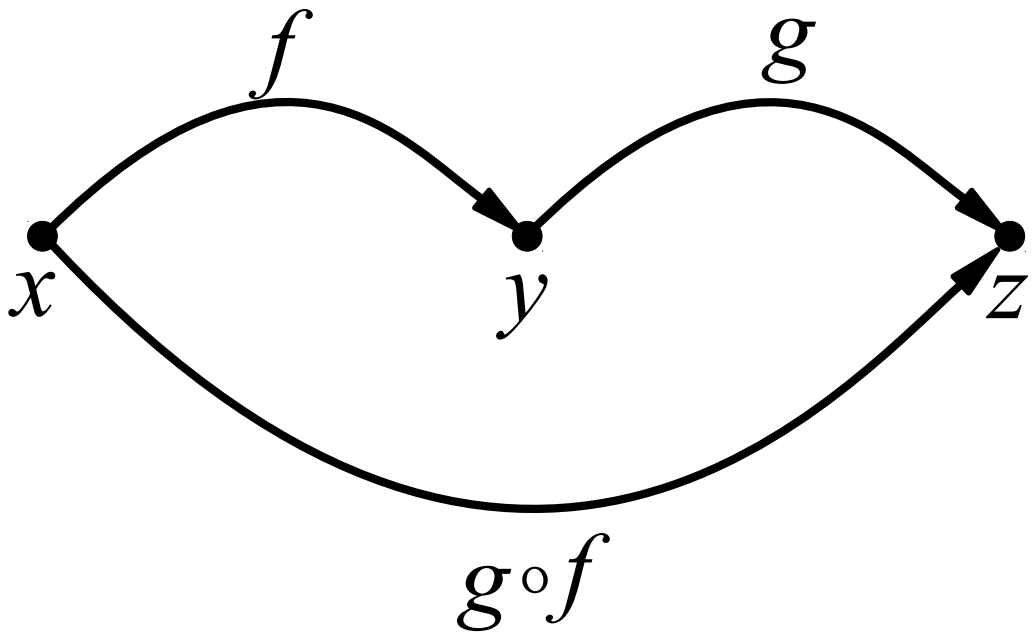
Числовая функция



Числовая функция



Числовая функция





Элементарные функции



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция

2) $y = a^{x}, a > 0, a \neq 1$ - показательная функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция

2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ - показательная функция

3) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ - обратные тригонометрические функции



Элементарные функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.



Элементарные функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры: $y = 2x^2 + 3x + 5$,

$y = sin(2^x)$,

$y = \mathrm{tg}\,\sqrt{x^3 + x^2}$.



Элементарные функции

Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция - это функция,

содержащая иррациональности

$y = x + \sqrt[3]{x}$,



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

$y = x + \sqrt{x} + \sin x.$



Числовая последовательность



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.



Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.



Числовая последовательность

Экономический пример:



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год.



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1,1$, $a_3 = 10 \cdot 1,1^2$,...,$a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$, ..., где a_n - размер вклада в течение n-ого года.



Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.



Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.



Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$. Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

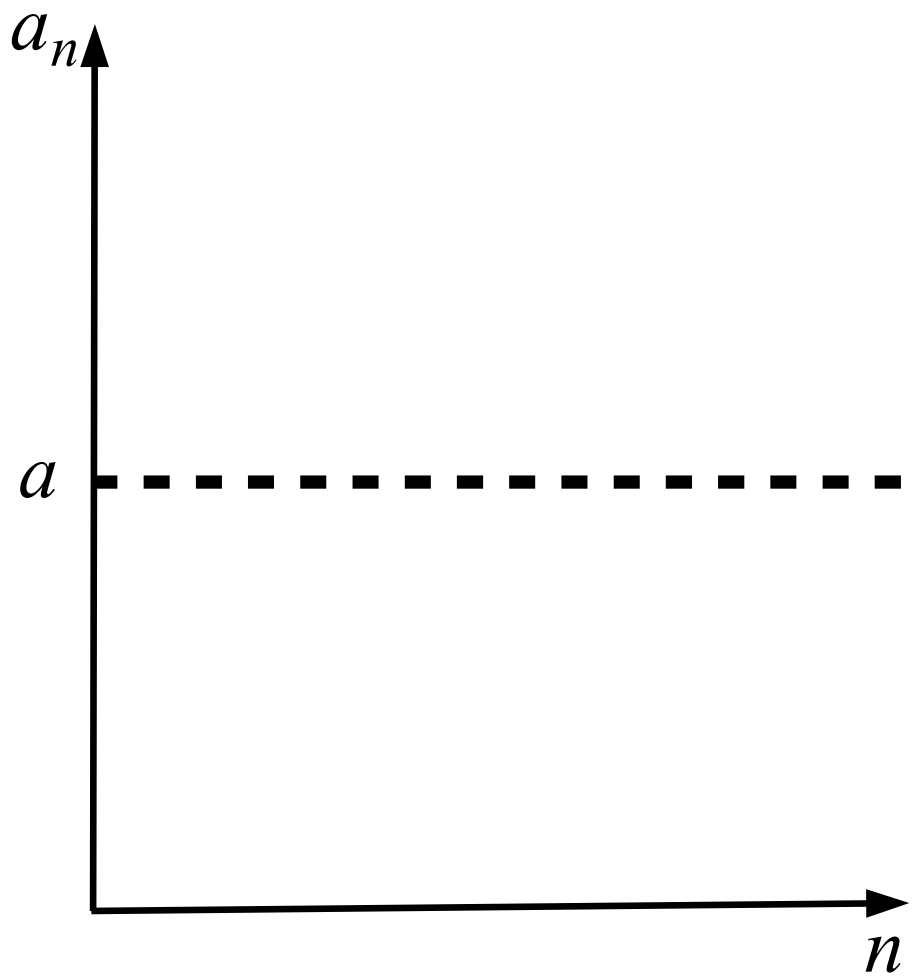
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

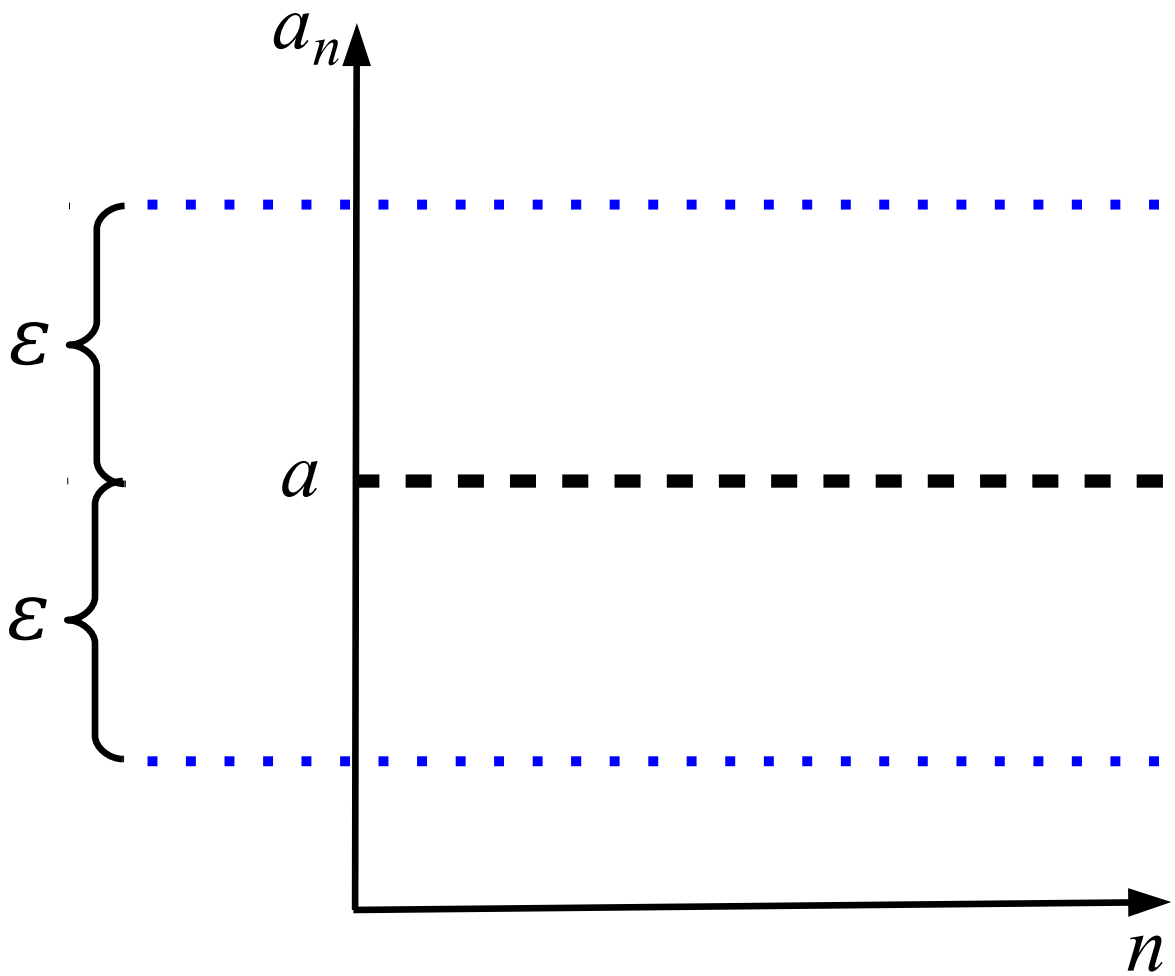
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

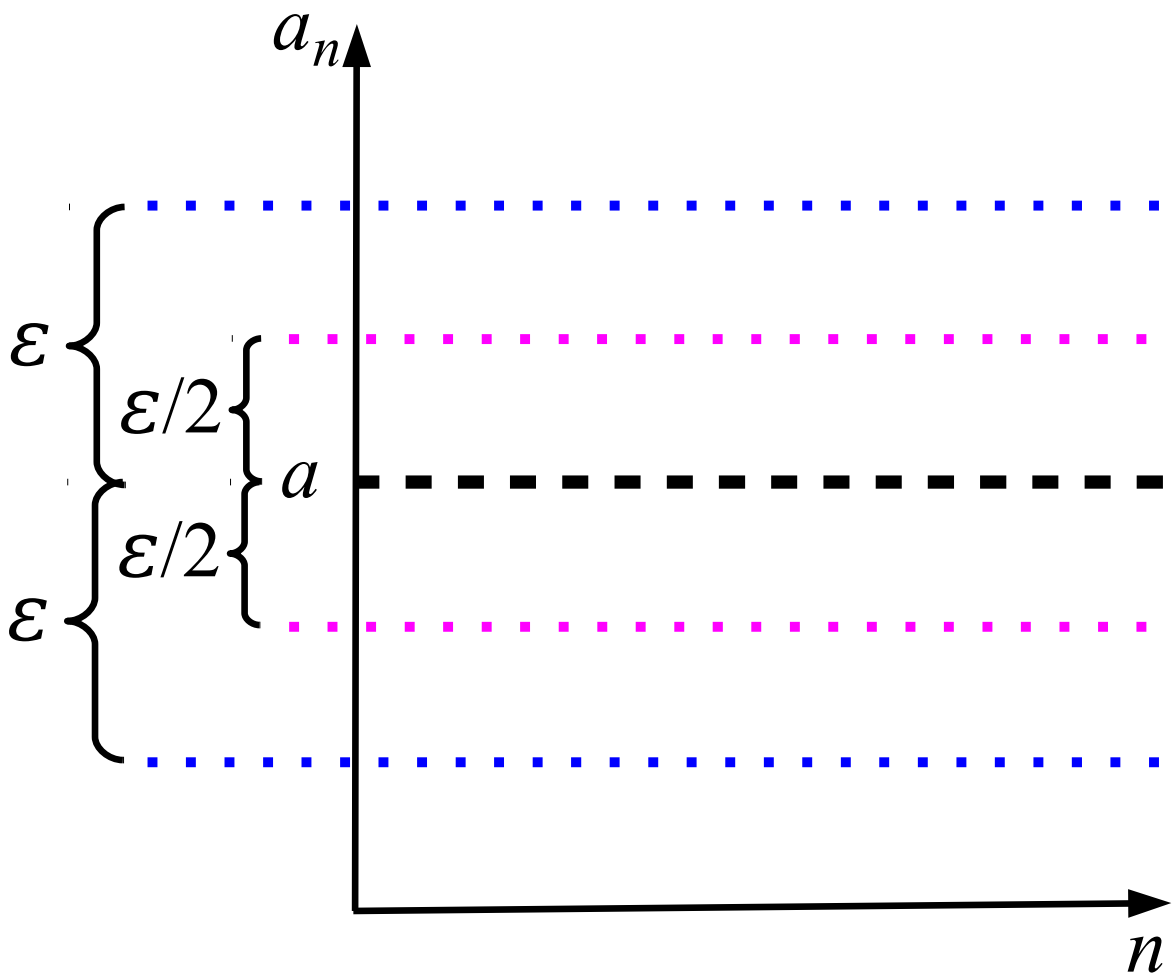
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

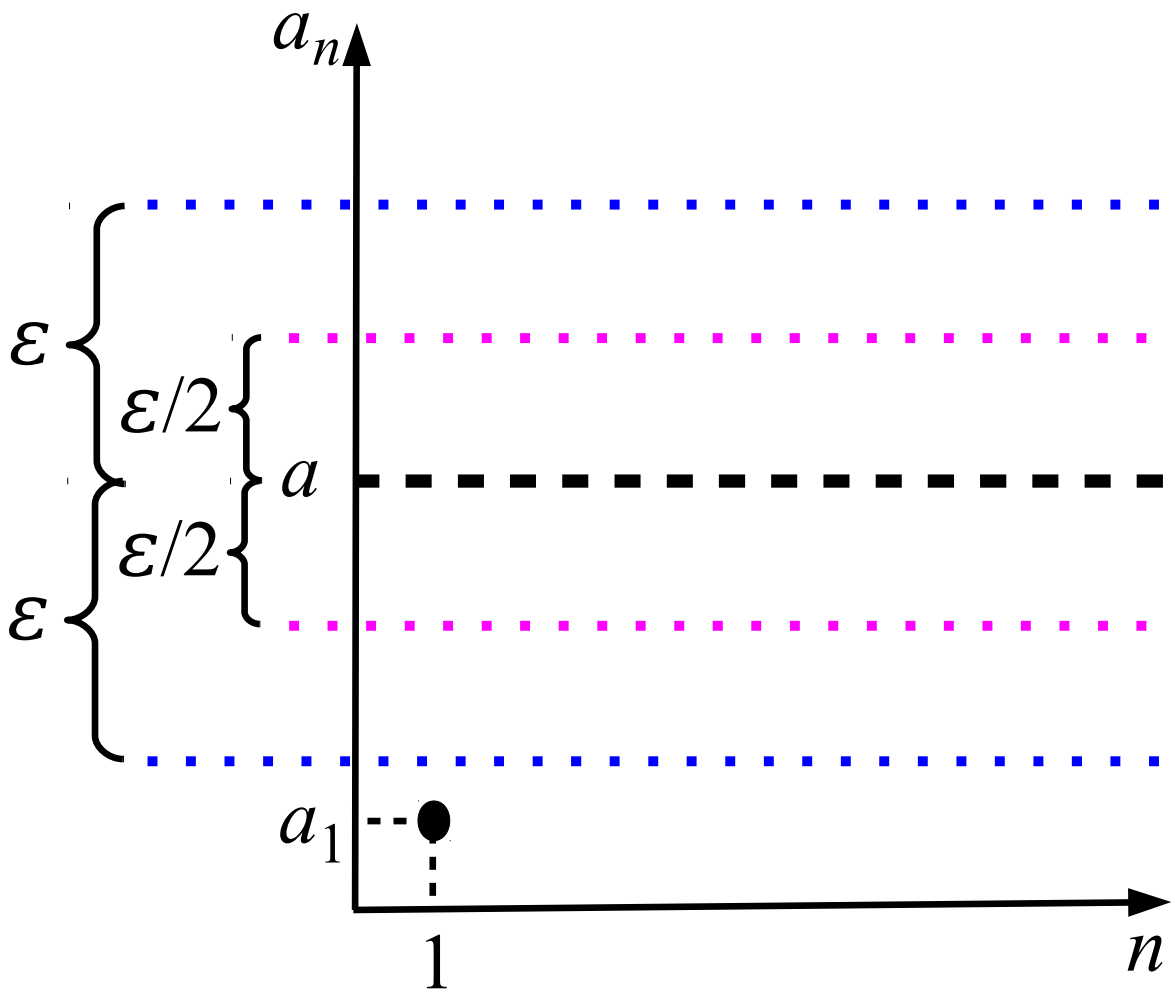
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

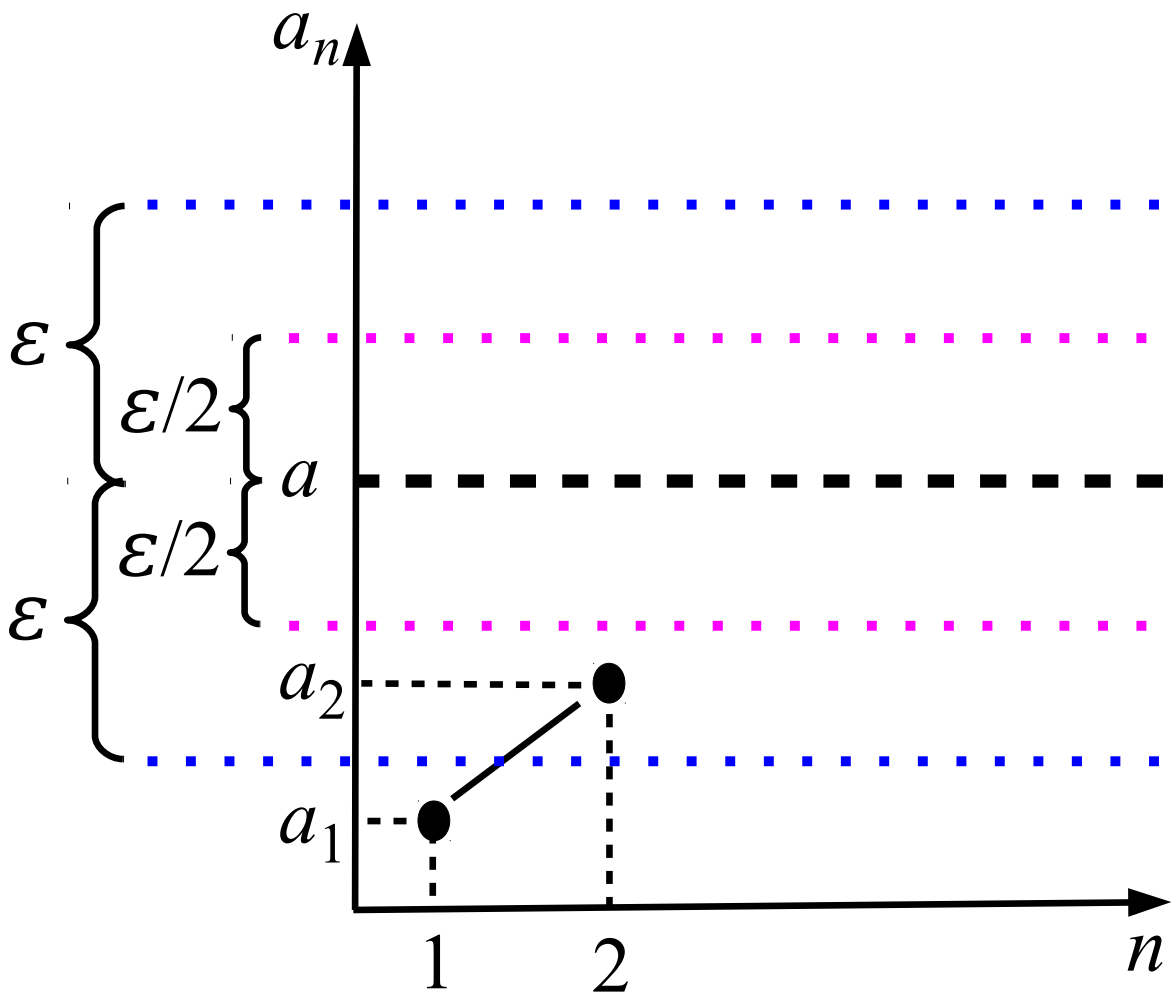
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

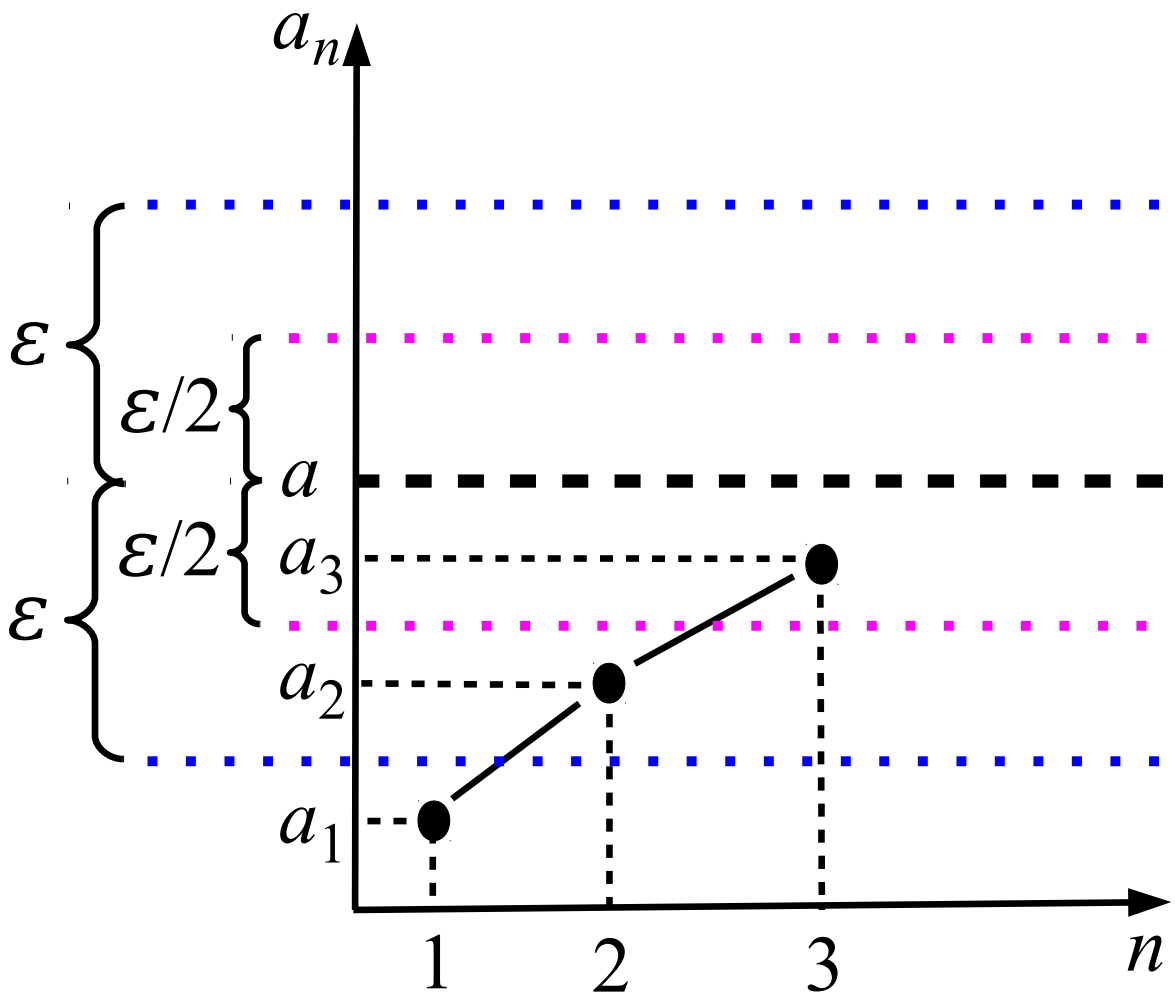
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

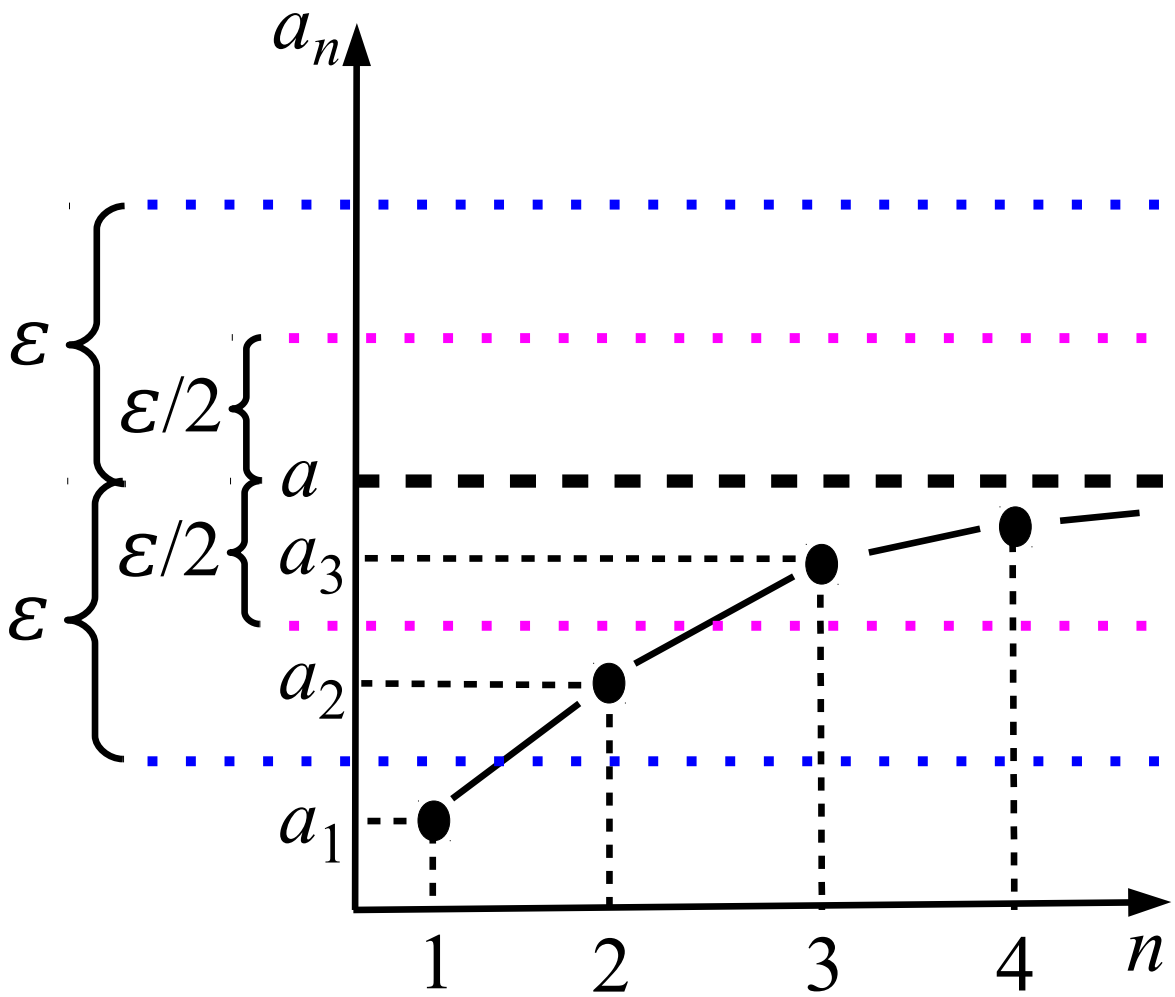
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

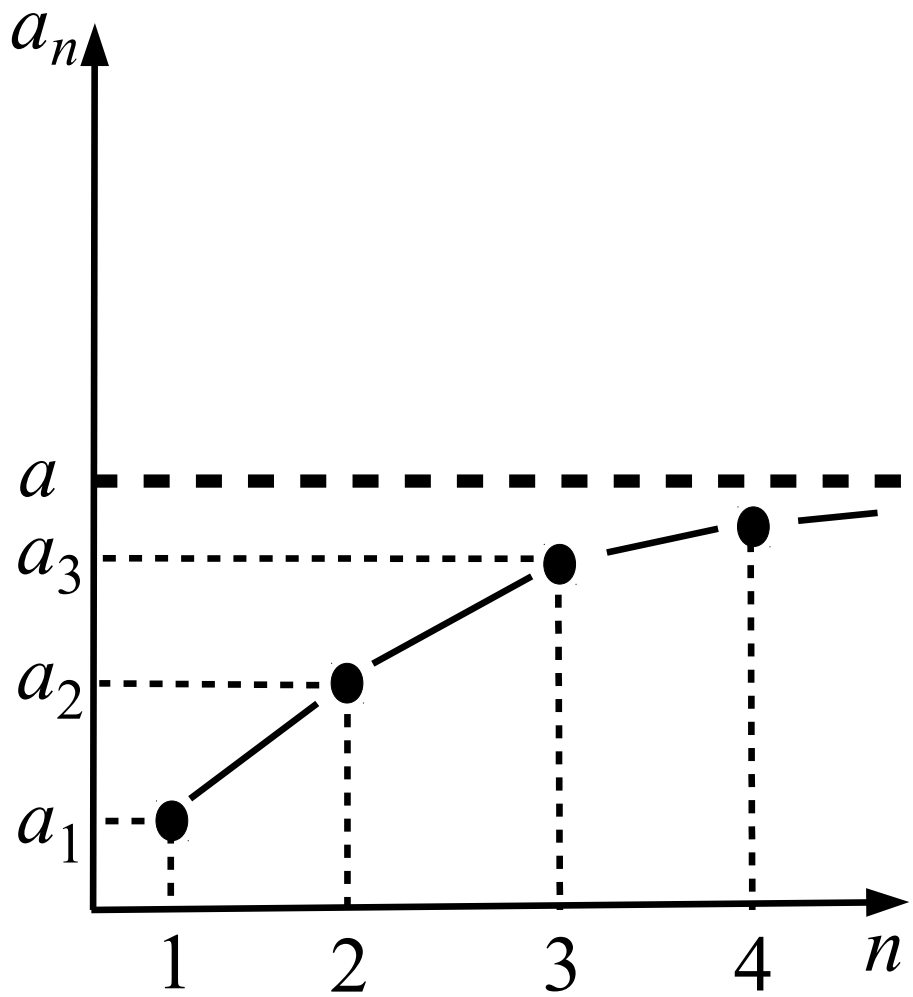
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon): \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

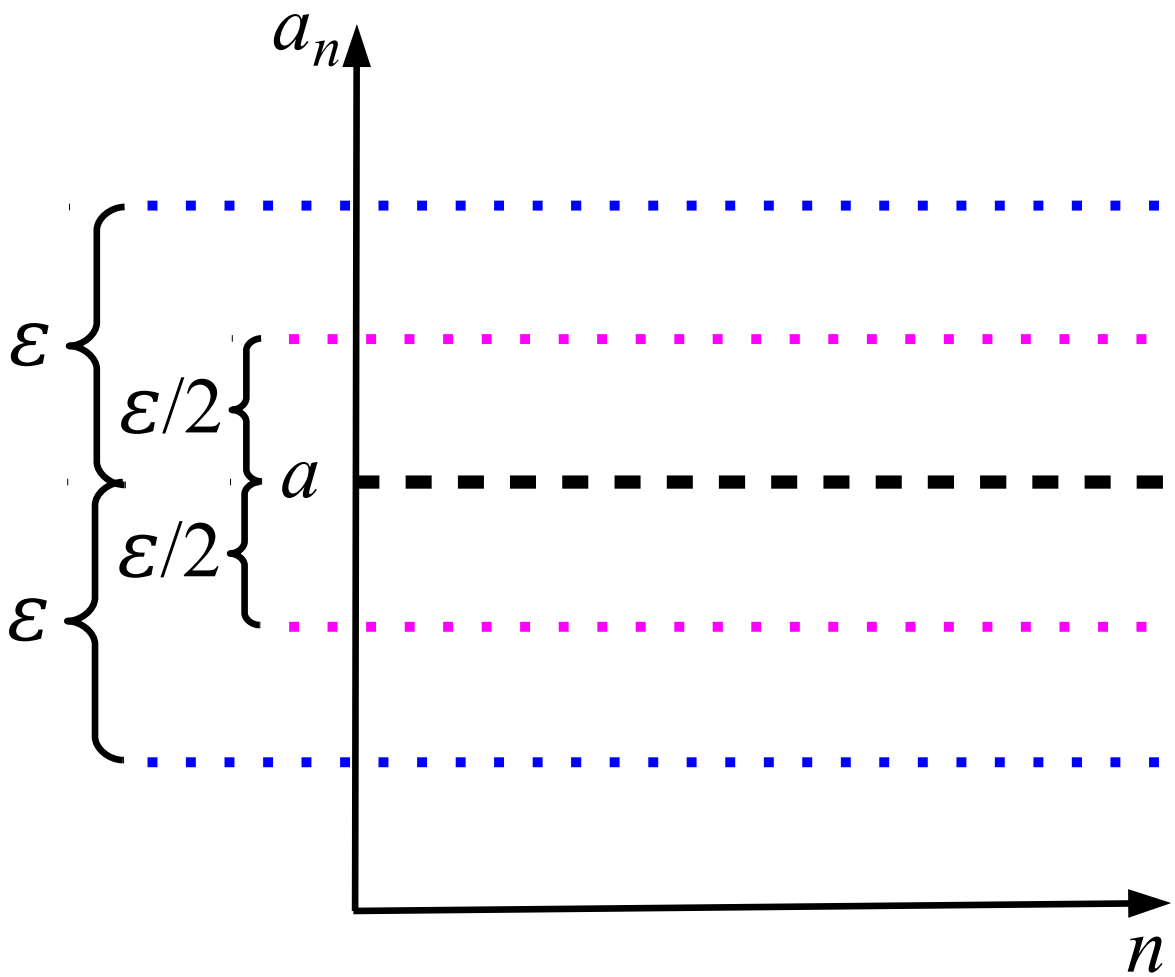
$$n(\varepsilon) = 1, \ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

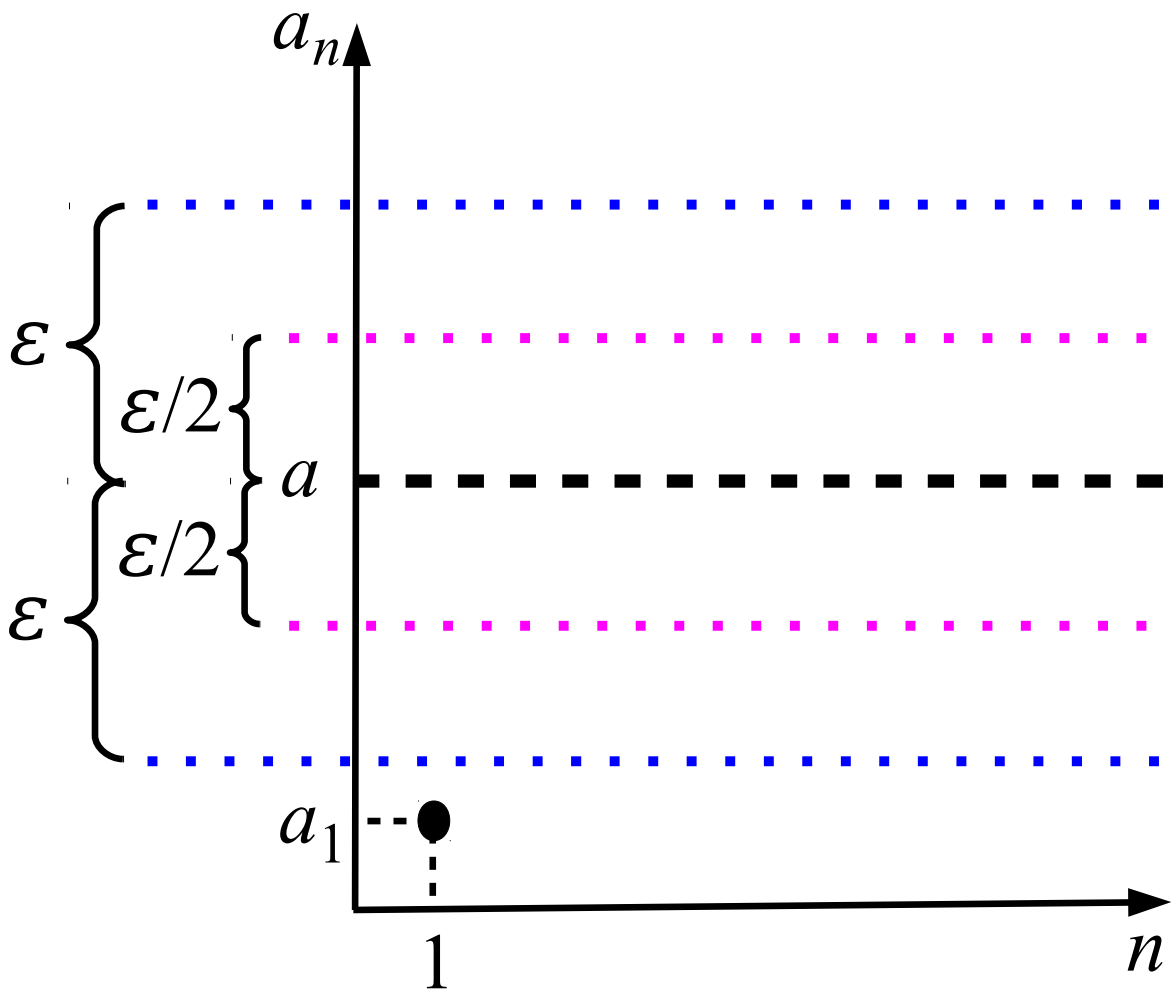
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

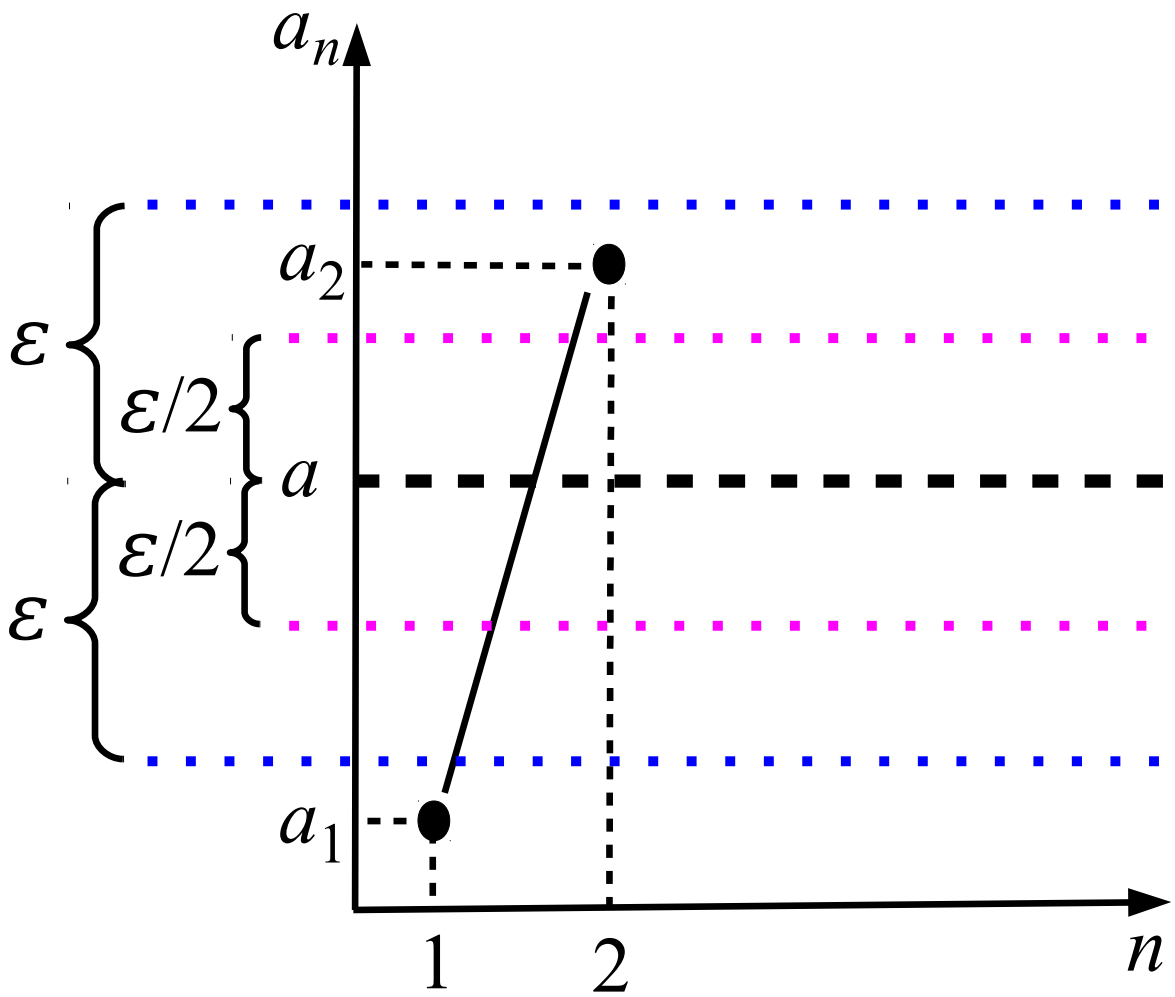
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

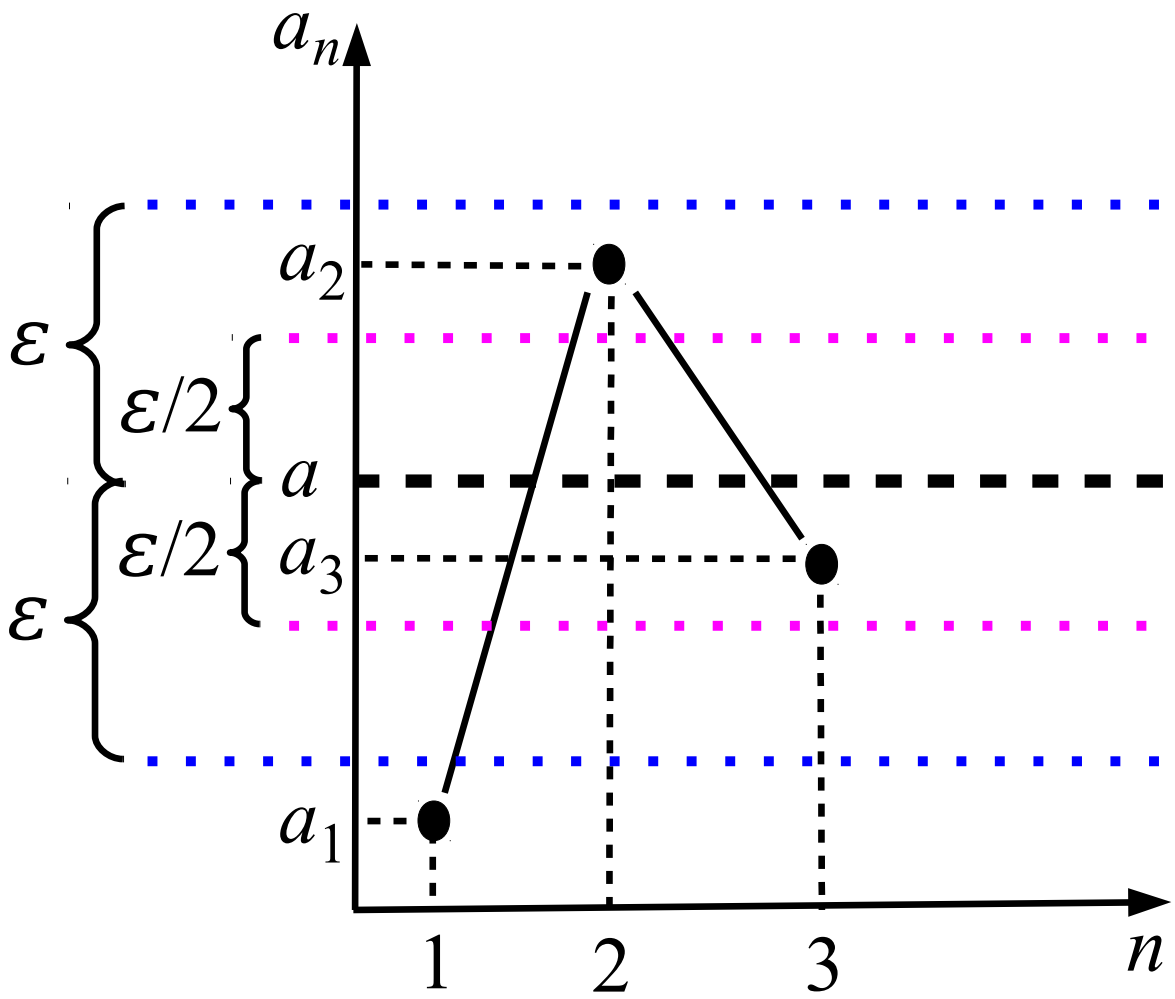
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

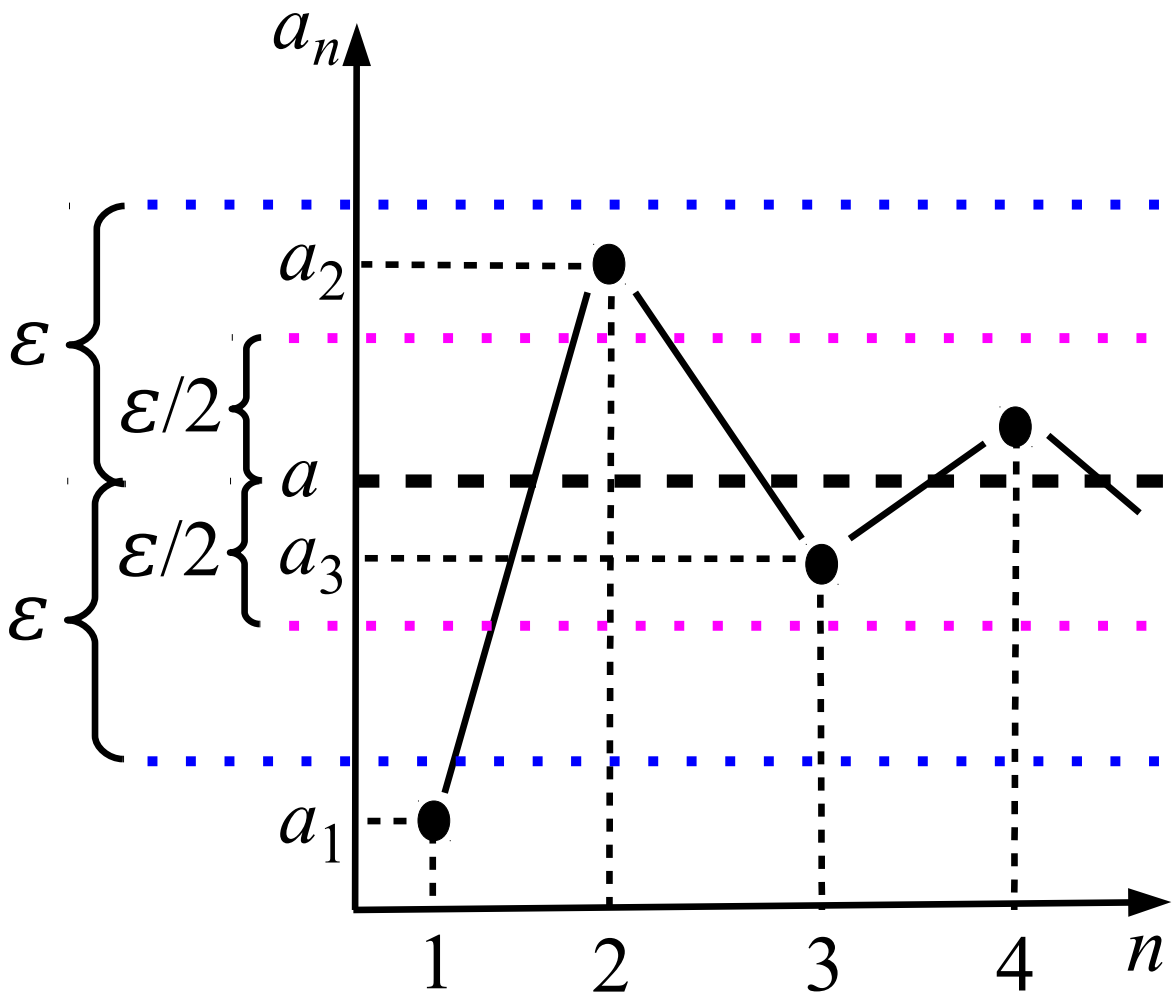
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

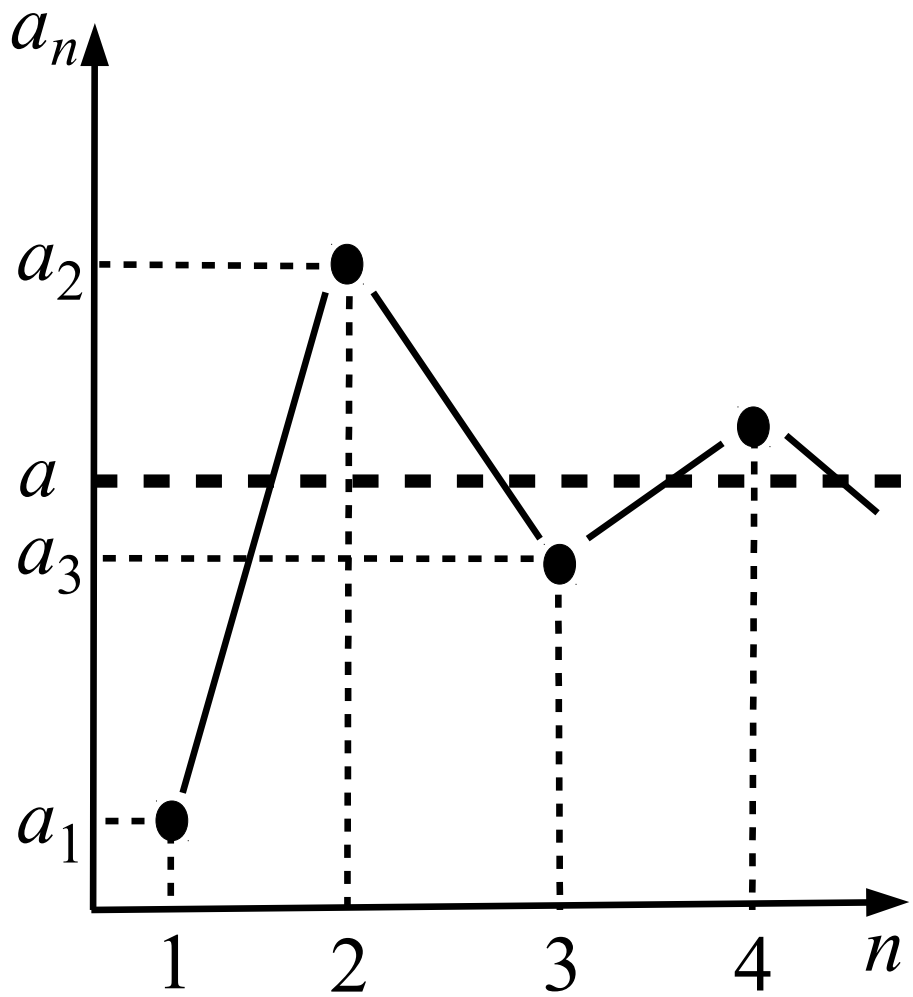
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon): \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1, \ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.



*Арифметические свойства конечных пределов**



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
4) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / y_n) = a/b$, если $b \neq 0$.



Доказательство свойства 1



Доказательство свойства 1

Дано:



Доказательство свойства 1

Дано: $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (1)$$



Доказательство свойства 1

Дано:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{1}$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \tag{2}$$



Доказательство свойства 1

Дано:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{1}$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \tag{2}$$

Доказать:



Доказательство свойства 1

Дано:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{1}$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \tag{2}$$

Доказать:
$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b \tag{3}$$



Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности



Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$:



Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon):$$
$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon.$$



Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon):$$

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon. \qquad (4)$$



Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon):$$

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Значит, нам надо найти $n(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство (4).



Числовая последовательность

$(1) \Rightarrow$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon):$$



$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$



Числовая последовательность

(1) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon)$:

$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

(2) $\Rightarrow$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_2(\varepsilon):$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_2(\varepsilon): \quad |y_n - b| < \varepsilon/2.$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_2(\varepsilon): \quad |y_n - b| < \varepsilon/2.$$

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. (5)



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_2(\varepsilon): \quad |y_n - b| < \varepsilon/2.$$

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. (5)

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon/2$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2$.



Числовая последовательность

Следовательно,



Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| =$$



Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b|$$



Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b|$$



Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$



Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$



Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться,



Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$

$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться, а значит, справедлива формула (3). ■

